RBF- und HBF-Netze

Michael Gendreyzig

6. Dezember 1995

Hyper-Basisfunktionen-Netze (HBF-Netze)

Zur Musterklassifizierung:
direkter Funktionswert f (gewichtete Summe) = lineare Aktivierungsfunktion im Ausgabeneuron $\longleftrightarrow$ sigmoide Aktivierungsfunktion

$\longrightarrow$ **Generalisierung** $\longrightarrow$

HBF mit individueller Gewichtung von $\|X - W_j\|$ (Argumente der Zentrumsfunktionen) durch:

1. Gewichtung des Abstands $\|X - W_j\|$ mit Faktor

2. Veränderung der Zentrumsfunktion mit zweitem Parameter

3. individuelle Gewichtung der $(x_i - w_{ij}) \quad \forall i$ des Zentrumsvektors
   $\Longrightarrow$ Ellipsoide statt Hyperkugel

4. Verwendung unterschiedlicher Radien und Achsen der Zentrumsfunktionen (optimal gedrehte Ellipsoide)

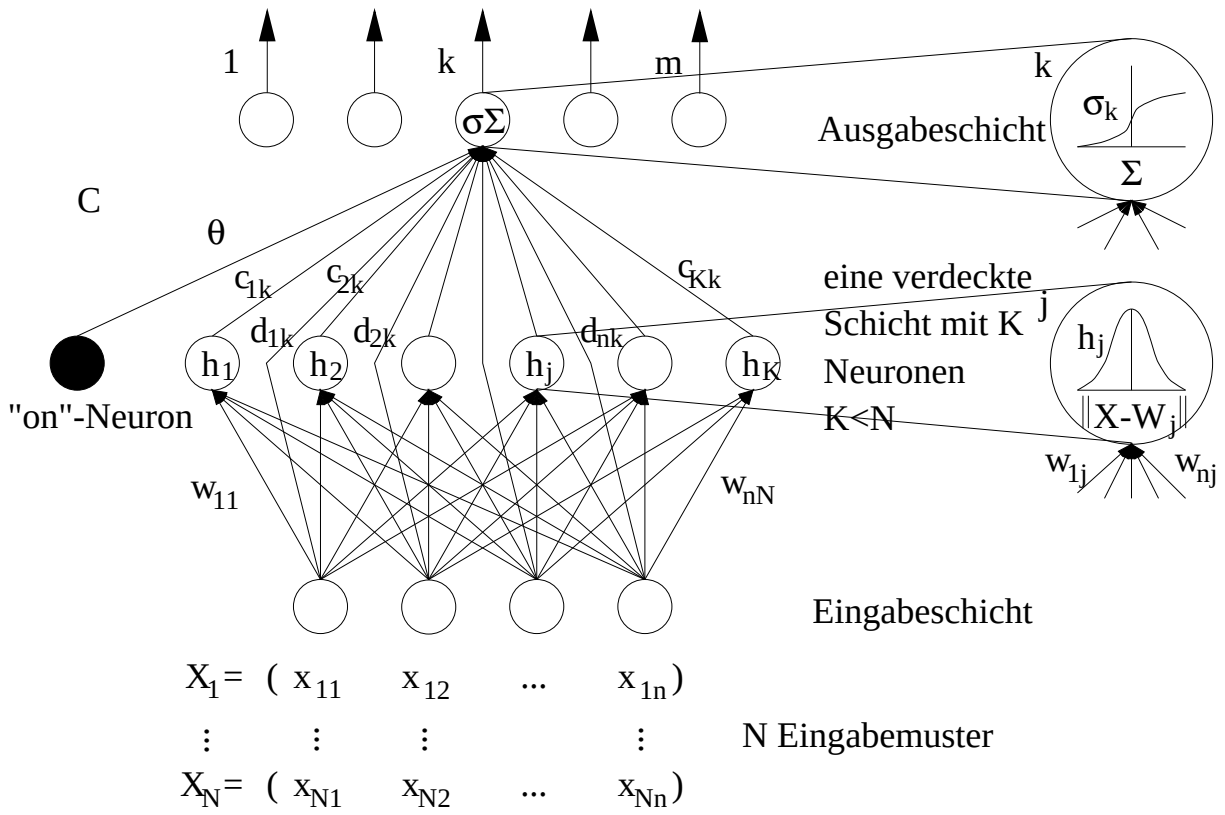
Untenstehende Formel ergibt sich aus dem RBF-Netz mit folgenden Erweiterungen:

- Schar von Funktionen f_k *(mehrwertige Funktionen)*,
- linearem Anteil von X in f *(Glättung)*,
- sigmoider Aktivierungsfunktion in Ausgabeneuronen und
- individueller Zentrumsfunktionen h_j für alle Neuronen

$$o_k(X) = \sigma(f_k(X)) =$$

$$= \sigma\left(\sum_{j=1}^{K} c_{jk}\, h_j(\|X - W_j\|) + \sum_{i=1}^{n} d_{ik} x_i + \theta_k\right) =$$

$$= \sigma\left(\sum_{j=1}^{K} c_{jk}\, h(\|X - W_j\|, p_j) + \sum_{i=1}^{n} d_{ik} x_i + \theta_k\right)$$



Iteratives Nachtrainieren der RBF-/HBF-Netze

- W_j i.a. **nicht** optimal
  $\rightarrow$ Verschiebung der Zentren/Stützstellen, Neuberechnung der c_{jk}

- Gewichte d_{ik} nicht direkt berechnet.
  $\rightarrow$ Nachtrainieren ausgehend von sehr kleinen Anfangswerten

- Berechnung der Inversen/Pseudoinversen birgt numerische Probleme $\Longrightarrow$ c_{jk} nicht optimal berechnet.
  $\rightarrow$ Optimierung *(Residuum)*, Nachtraining

- Wahl der p_j (Breite der h_j) nicht immer optimal gewählt.
  $\rightarrow$ Verbesserung durch Lernen

Ziel: Minimierung der Fehlerfunktion

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{N} (y_{ik} - o_k(X_i))^2$$

Dazu: Fehler des Ausgabeneurons k bei Testmuster i: $\triangle_{ik} = y_{ik} - o_k(X_i)$
$z(q,p) = z(\|X - W_j\|^2, p) = h(\|X - W_j\|, p)$
Dann:

$$\frac{\partial z(q,p)}{\partial W_j} = \frac{\partial z(q,p)}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial W_j} = \frac{\partial \|X - W_j\|^2}{\partial W_j}\frac{\partial z(q,p)}{\partial q} =$$

$$-2(X - W_j)\frac{\partial z(q,p)}{\partial q}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial c_{jk}} &= \frac{1}{2}\sum_i (y_{ik} - o_k(X_i))^2 = \frac{1}{2}\sum_i 2\triangle_{ik}\frac{\partial \triangle_{ik}}{\partial c_{jk}} \\
&= -\sum_i \triangle_{ik}\sigma'(f_k(X_i))\ \underbrace{z(\|X - W_j\|^2, p_j)}_{=h(\|X-W_j\|,p_j)} \\
\frac{\partial E}{\partial d_{ik}} &= \cdots = -\sum_i \triangle_{ik}\sigma'(f_k(X_i))x_j
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial \theta_k} &= \cdots = -\sum_i \triangle_{ik} \sigma'(f_k(X_i)) \\
\frac{\partial E}{\partial W_j} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \sum_i 2 \triangle_{ik} \frac{-\partial o_k}{\partial W_j} \\
&= \sum_k \sum_i \triangle_{ik} (-1) \sigma'(\underbrace{f_k(Xi)}_{=-2(X_i - W_j) z_q}) c_{jk} \\
&= 2 \sum_i z_q(\|X - W_j\|^2, p_j)(X_i - W_j) \cdot \\
&\quad \cdot \sum_k c_{jk} \triangle_{ik} \sigma'(f_k(X_i)) \\
\frac{\partial E}{\partial p_j} &= \frac{1}{2} \sum_k \sum_i 2 \triangle_{ik} \frac{-\partial o_k}{\partial p_j} \\
&= -\sum_k^m \sum_i c_{jk} \triangle_{ik} \sigma'(f_k(X_i)) z_p(\cdots) \\
&= -\sum_i z_p(\cdots) \sum_k c_{jk} \triangle_{ik} \sigma'(f_k(X_i))
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ (nach batch-Backpropagation):

$$\triangle W_j = -\eta_1 \frac{\partial E}{\partial W_j}, \triangle p_j = -\eta_2 \frac{\partial E}{\partial p_j},$$

$$\triangle c_{jk} = -\eta_3 \frac{\partial E}{\partial c_{jk}}, \triangle d_{ik} = -\eta_3 \frac{\partial E}{\partial d_{ik}},$$

$$\triangle \theta_k = -\eta_3 \frac{\partial E}{\partial \theta_k}$$

$\Longrightarrow$ (Verbesserung):

$$\triangle a(t+1) = -\eta \frac{\partial E}{\partial a} + \mu \triangle a(t)$$

$$f\ddot{u}r\ a = W_j, c_{jk}, d_{ik}, \theta_k, p_j$$

Zentren/Radien in RBF-Netzen

- Zentren $\subset$ Trainingsmuster, event. Modifikation d. Eingabemuster u. Verbindungsgewichte

- LVQ (learning vector quantization)

- selbstorganisierende Karten